

Метод обратной матрицы

Метод обратной матрицы — это способ решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), записанных в матричной форме $Ax = b$, где A — квадратная матрица коэффициентов, x — вектор неизвестных, а b — вектор свободных членов. Суть метода заключается в вычислении $x = A^{-1}b$, где A^{-1} — обратная матрица к A .

Условия применимости

Метод применим только для квадратных матриц, у которых определитель не равен нулю ($\det A \neq 0$). Если $\det A = 0$, то матрица называется вырожденной, и обратной матрицы не существует. В этом случае систему нельзя решить методом обратной матрицы.

Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений

Тогда систему можно записать так:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A \cdot X = B$

Найдем решение системы в матричном виде.
Предположим, что $\det A$ отличен от нуля и, следовательно, существует обратная матрица A^{-1} .
Умножим слева матричную запись системы на обратную матрицу:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Алгоритм решения системы методом обратной матрицы

1. Записать систему в матричной форме $Ax = b$, где A — матрица коэффициентов, x — столбец неизвестных, b — столбец свободных членов.
2. Вычислить определитель матрицы A . Если $\det A \neq 0$, то матрица имеет обратную.
3. Найти обратную матрицу A^{-1} . Для этого обычно используют формулу: $A^{-1} = 1/(\det A) \cdot$ присоединённая матрица где присоединённая матрица — это

транспонированная матрица алгебраических дополнений всех элементов матрицы A .

4. Умножить обратную матрицу A^{-1} на столбец свободных членов b , чтобы получить решение системы: $x = A^{-1}b$.

Пример

Решим систему уравнений: $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$, $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$.

Шаг 1. Вычислим определитель матрицы A . Если он не равен нулю, переходим к следующему шагу. Шаг 2. Найдём алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A . Шаг 3. Составим матрицу из алгебраических дополнений и транспонируем её — получим присоединённую матрицу. Шаг 4. Разделим каждый элемент присоединённой матрицы на определитель $\det A$ — это и будет обратная матрица A^{-1} . Шаг 5. Умножим A^{-1} на столбец свободных членов b , чтобы найти решение системы.

Важные замечания

- Метод применим только при равенстве числа уравнений и числа неизвестных.
- Для однородных систем ($b = 0$) метод также применим, но в этом случае система имеет нетривиальное решение только если $\det A = 0$.
- При вычислениях следует внимательно следить за знаками и порядком действий, чтобы избежать ошибок.

Метод обратной матрицы — один из способов решения систем линейных уравнений, наряду с методом Гаусса, методом Крамера и другими.